

Kochsche Schneeflocke

– Lösungshinweis –

Über den mittleren Dritteln der Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge $a > 0$ wird je ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Dieser Schritt wird wiederholt, indem über jedem mittleren Drittel

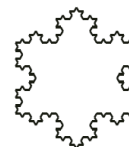
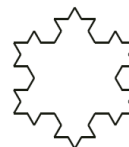
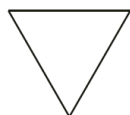


Abbildung 1: Ganz links ist das Ausgangsdreieck abgebildet; danach kommen der 1., 2. und 3. Iterationsschritt der Kochschen Schneeflocke¹

der Seiten des so entstandenen Polygons jeweils wieder ein gleichseitiges Dreieck errichtet wird. Die *Kochsche Schneeflocke*² entsteht als Limes, wenn man diese Vorschrift unendlich oft wiederholt. Der dabei entstehende Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke ist endlich.



Wie groß ist der Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke?

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke nach dem 1. Iterationsschritt, wenn das Ausgangsdreieck eine Seitenlänge von $a > 0$ besitzt.

Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a ist $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

Aufgabe 1

Da das Ausgangsdreieck drei Seiten besitzt, werden insgesamt drei kleinere gleichseitige Dreiecke hinzugefügt. Jedes von diesen besitzt eine Seitenlänge von $\frac{a}{3}$ und demnach einen Flächeninhalt von

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$$

Insgesamt erhält man einen Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke nach dem 1. Iterationsschritt von

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3 \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) = \frac{10}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$$

Aufgabe 2: Um den Grenzwert des Flächeninhalts der Kochschen Schneeflocke zu bestimmen, wird im Folgenden nur eine Seite des Ausgangsdreiecks betrachtet.³



Abbildung 2: Eine Seite der Kochschen Schneeflocke nach dem 2. (links) bzw. 3. (rechts) Iterationsschritt

¹ Tretter, C. (2013). *Analysis I*. Springer Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0349-6>, S. 69

² Diese ist benannt nach dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch und ist eines der ersten Beispiele für ein „Fraktal“.

³ Eine solche Seite wird auch als *Koch-Kurve* bezeichnet. Zu Beginn Ihrer Entdeckung auch (ironisch) als „Monsterkurve“ betitelt.

- Bestimmen Sie die Anzahl an gleichseitigen Dreiecken, die im k -ten Iterationsschritt an einer Seite hinzugefügt werden. Begründen Sie Ihre Antwort.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt, den ein neu hinzugefügtes gleichseitiges Dreieck im k -ten Iterationsschritt an einer Seite besitzt.
- Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der im k -ten Iterationsschritt an einer Seite hinzukommt.

Aufgabe 2a)

In jedem Schritt wird eine Strecke in 4 neue, gleichlange Strecken umgewandelt. Dabei wird einer Ausgangsstrecke genau ein gleichseitiges Dreieck hinzugefügt, sodass man im ersten Iterationsschritt 1 Dreieck, im zweiten Iterationsschritt 4 Dreiecke etc. erhält. Insgesamt hat man im k -ten Iterationsschritten 4^{k-1} viele neue gleichseitige (und kongruente) Dreiecke hinzugefügt.

Aufgabe 2b)

In jedem Iterationsschritt wird die Streckenlänge um den Faktor $\frac{1}{3}$ verkleinert, da jede Strecke gedrittelt wird. Die so entstehenden gleichseitig Dreiecke besitzen demnach im k -ten Iterationsschritt die Seitenlänge $\frac{1}{3^k} \cdot a$ und daher den Flächeninhalt

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3^k} \cdot a \right)^2 = \frac{1}{3^{2k}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = \frac{1}{9^k} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$$

Aufgabe 2c)

Im k -ten Iterationsschritt kommen 4^{k-1} (kongruente) Dreiecke mit dem Flächeninhalt $\frac{1}{9^k} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$ hinzu. Diese besitzen demnach gesamt einen Flächeninhalt von

$$4^{k-1} \cdot \frac{1}{9^k} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = \frac{4^{k-1}}{9^k} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^k \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right)$$

Aufgabe 3: Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 2 soll nun die Hauptfrage beantwortet werden.

- Bestimmen Sie den Flächeninhalt, der insgesamt bis zum einschließlich n -ten Iterationsschritt an einer Seite hinzukommt.
- Berechnen Sie den Flächeninhalt, der an einer Seite der Kochschen Schneeflocke im Vergleich zum Ausgangsdreieck hinzukommt, d.h. für $n \rightarrow \infty$.

Hinweis: Geometrische Reihe

- Berechnen Sie den gesamten Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke.

Aufgabe 3a)

Um diesen Flächeninhalt zu erhalten, müssen alle Flächeninhalte der Iterationsschritte zuvor aufsummiert werden (vgl. Aufgabe 2c):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

Aufgabe 3b)

Für den Fall $n \rightarrow \infty$ ist dann der Flächeninhalt einer Seite der Kochschen Schneeflocke gegeben durch

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

Um die geometrische Reihe anwenden zu können, müsste der Index bei $k = 0$ beginnen. Hierfür muss daher eine „geschickte 0“ eingefügt werden. Die Reihe lässt sich damit umformen zu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k - 1 = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} - 1 = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$$

Der Flächeninhalt einer Seite der Kochschen Schneeflocke ist also

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$$

Aufgabe 3c)

Der Flächeninhalt der gesamten Kochschen Schneeflocke setzt sich aus dem Flächeninhalt des ursprünglichen gleichseitigen Dreiecks sowie dem von drei Koch-Kurven zusammen:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 + 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right) = \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a^2\right)$$

Die Kochsche Schneeflocke hat damit einen Flächeninhalt, der exakt $\frac{8}{5}$ des ursprünglichen Dreiecks ausmacht (bzw. Erhöhung um genau 60 %) und zwar unabhängig davon, wie groß das ursprüngliche Dreieck war!

Mit Hilfe der Kochschen Schneeflocke (in zwei verschiedenen Größen) lässt sich die Ebene parkettieren. Die Seitenlängen der beiden Schneeflocken-Typen stehen dabei im Verhältnis $\sqrt{3}:1$

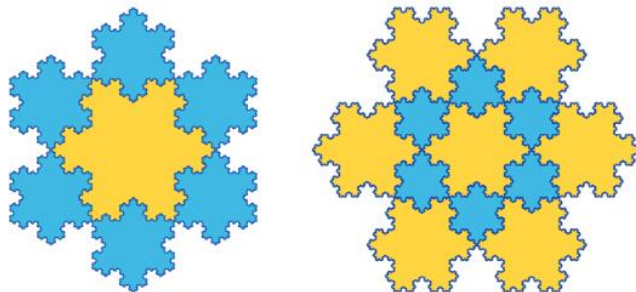


Abbildung 3: Parkettierung der Ebene mit Hilfe der Kochschen Schneeflocke⁴

⁴ Strick, H. K. (2020). *Mathematik ist wunderschön*. Springer Berlin Heidelberg.

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61682-6>, S. 281

Copyright: Lehrstuhl für Mathematik V – Didaktik der Mathematik (Prof. Dr. Hans-Stefan Siller), 2024